Talamidi.com تم تحميل هذا الملف من موقع

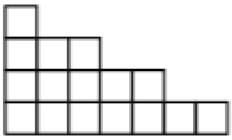
Cours SUITES NUMERIQUES PROF : ATMANI NAJIB 1BAC BIOF

avec Exercices avec solutions

LES SUITES NUMERIQUES

I) ACTIVITES

Activité 1 : suite définit par une formule explicite ou une formule de récurrence



Des gradins sont constitués de poutres comme ceci (voir dessin)

On considère la suite U des nombres de poutres par niveau en commençant par le haut qui sera appelé le rang 0, le nombre de poutres de rang n ∈ N est noté U_1.

1)formule de récurrence

a)donner les valeur de U_0, U_1, U_2 , U_3

b) comment passe-t-on de U_n à U_{n+1} ?

(Donner une relation entre ces deux termes)

c) en déduire les valeur de U_4, U_5 , U_6

d) utiliser la calculatrice pour obtenir les valeurs de U_{10} , U_{100} puis U_{200}

e) utiliser la calculatrice pour trouver la plus petite valeur de n telle que $U_n \geq 500$

2) formule explicite

a) trouver une formule qui donne directement U_n en fonction de n

(commencer par U_1, U_2 , U_3,U_4 puis généraliser à n)

b) retrouver les valeurs de U_{10} ,U_{100} puis U_{200}

c) retrouver algébriquement la plus petite valeur de n telle que $U_n \geq 500$

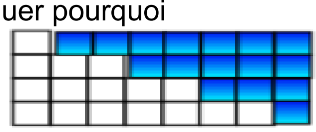
3. pour aller un peu plus loin :

soit $S_n = u_0 + u_1 + u_1 + ... + u_n$ la somme des nombres de poutres qu'il faut au total du rang 0 au rang n

a) donner les valeurs de S_0, S_1, S_2 et S_3

b) observer la figure et expliquer pourquoi

$$S_3 = 4\left(\frac{u_0 + u_3}{2}\right)$$



puis vérifier que l'on retrouve bien S_3

c) calculer S_{10} par un raisonnement analogue

d) montrer que $S_n = (n+1)^2$

e) en déduire la hauteur maximale de gradin que l'on peut construire avec 1000 poutres au total et préciser le nombre de poutres qui restent

Activité 2 : Suite définie uniquement par une formule de récurrence :

soit la suite U définie par : $U_{n+1} = 0.95U_n + 5$ et $U_1 = 200$

1)calculer : U_1, U_2 , U_3 , U_{10}, U_{100}, U_{200}

2) essayer de trouver la plus petite valeur de n telle que $U_n \prec 100$

3. un club à 200 membres inscrits le premier mois, Chaque mois, 5% des membres partent, mais le responsable arrive toujours à obtenir 5 nouvelles inscriptions

a) montrer que le nombre d'inscrit le ne mois est un

b) que semble devenir le nombre d'inscrits à long terme ?

Activité 3 : suite définie uniquement par une formule explicite

Soit la suite V définie par : $U_{n+1} = 100 + 100 \times 0.95^{n-1}$

1) calculer : V_1, V_2 , V_3 , V_{10}, V_{100} et V_{200}

2) que semble-t-il pour les suites V et U où U est la suite de Activité 2 précédent ?

Activité4 : Une personne a reçu deux offres de deux société commerciales pour une durée de 4 ans.

La société $\mathcal{A}$ propose un salaire de 4500 Dh pour le premier mois et une augmentation de salaire de 75 Dh chaque mois.

La société $\mathcal{B}$ propose un salaire de 3500 Dh pour le premier mois et une augmentation de salaire de 3% chaque mois.

Soient a_n et b_n les salaires proposés respectivement par les sociétés $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ pour le nième mois.

1- Calculer les salaires des 4 premiers mois pour les deux sociétés.

2- Trouver une relation entre a_{n+1} et a_n puis entre b_{n+1} et b_n.

3- Calculer les salaires du 10 ème mois pour les deux sociétés.

4- Quelle est la société la plus bénéfique pour la personne ?

Talamidi.com تم تحميل هذا الملف من موقع

II) GENERALITES

1) Définitions et notations.

Définition : On appelle suite numérique toute application de $\mathbb{N}$ (ou une partie I de $\mathbb{N}$) vers $\mathbb{R}$

$u : I \to \mathbb{R}$

$n \mapsto u(n) = u_n$

Notation : Si u est une suite numérique définie sur $\mathbb{N}$

l'image de l'entier n par u se note u_n et s'appelle le terme de rang n de la suite

L'entier n s'appelle **l'indice du terme** u_n

La suite numérique u se note : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ou $(u_n)_n$

Remarque : On peut aussi définir une suite à partir d'un certain rang.

Exemple :1/ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie sur* $\mathbb{N}$ *par* $u_n = \dfrac{1}{n+2}$

$u_0 = \dfrac{1}{2}; u_1 = \dfrac{1}{3}; u_2 = \dfrac{1}{4}; u_3 = \dfrac{1}{5};......$

2/ $(v_n)_{n\geq 3}$ *définie pour tout* $n \geq 3$ *par* $v_n = \dfrac{1}{n-2}$

$v_3 = 1; v_4 = \dfrac{1}{2}; v_5 = \dfrac{1}{3}; v_6 = \dfrac{1}{4};......$

2) Comment générer une suite

Une suite numérique peut être définie de deux manières différentes :

a) Suite définie par : une expression explicite

Dans laquelle le terme u_n de la suite $(u_n)_n$ est définie en fonction de n

Exemple : soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$u_n = 2n+3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1)Calculer : les quatres 1ere termes de la suite $(u_n)_n$

2) Calculer: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n$

Solution : 1) $u_0 = 2\times 0 + 3 = 3 \quad u_1 = 2\times 1 + 3 = 5$

$u_1 = 2\times 1 + 3 = 5 \quad u_3 = 2\times 3 + 3 = 9$

2) $u_{n+1} - u_n = (2(n+1)+3) - (2n+3)$

$u_{n+1} - u_n = 2n + 2 + 3 - 2n - 3 = 2$

b) Une suite définie par : une expression récurrente

Ces suites s'appellent des suites récurrentes, elles sont définies par le (ou les) premier (s) terme (s) et une relation entre deux ou plusieurs termes consécutifs.

Exemple1 : Suites récurrente du premier ordre

soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par :

$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 5u_n - 7 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Calculer : $u_1; u_2; u_3$

Solution : on a $u_{n+1} = 5u_n - 7$

Pour n=0 on a: $u_{0+1} = 5u_0 - 7$ donc $u_1 = 5\times 2 - 7$

Donc : $u_1 = 3$

Pour n=1 on a: $u_{1+1} = 5u_1 - 7$ donc $u_2 = 5\times 3 - 7$

Donc : $u_2 = 8$

Pour n=2 on a: $u_{2+1} = 5u_2 - 7$ donc $u_3 = 5\times 8 - 7$

Donc : $u_3 = 33$

Remarque : Il faut bien écrire les indices : u_{n+1} n'est pas $u_n + 1$

Exemple2 : Suites numériques du second ordre.

soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par :

$\begin{cases} v_0 = 1; v_1 = -1 \\ v_{n+2} = 2v_{n+1} - 3v_n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Calculer : $v_2; v_3; v_4$

Solution : on a $v_{n+2} = 2v_{n+1} - 3v_n$

Pour n=0 on a: $v_{0+2} = 2v_{0+1} - 3v_0$ donc $v_2 = 2v_1 - 3v_0$

Donc : $v_2 = 2\times(-1) - 3\times 1 = -5$

Pour n=1 on a: $v_{1+2} = 2v_{1+1} - 3v_1$ donc $v_3 = 2v_2 - 3v_1$

Donc : $v_3 = 2(-5) - 3(-1) = -7$

Pour n=2 on a: $v_{2+2} = 2v_{2+1} - 3v_2$ donc $v_4 = 2v_3 - 3v_2$

Donc : $v_4 = 2(-7) - 3(-5) = -14 + 15 = 1$

3) Suites majorées, suites minorées, suites bornées.

Activité1 : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$u_n = \dfrac{n+1}{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : \dfrac{1}{2} < u_n \leq 1$

Solution :1) Montrons que : $u_n \leq 1$??

$1 - u_n = 1 - \dfrac{n+1}{2n+1} = \dfrac{(2n+1)-(n+1)}{2n+1} = \dfrac{n}{2n+1} \geq 0$

Donc $u_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Talamidi.com تم تحميل هذا الملف من موقع

2)Montrons que : $\frac{1}{2}<u_n$??

$u_n-\frac{1}{2}=\frac{n+1}{2n+1}-\frac{1}{2}=\frac{2(n+1)-(2n+1)}{2n+1}=\frac{1}{2n+1}>0$

Donc $\frac{1}{2}<u_n\quad \forall n\in\mathbb{N}$

Par suite : : $\forall n\in\mathbb{N}\quad :\frac{1}{2}<u_n\leq 1$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1 car $u_n\leq 1\quad \forall n\in\mathbb{N}$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $\frac{1}{2}$ car $\frac{1}{2}<u_n\quad \forall n\in\mathbb{N}$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car : $\forall n\in\mathbb{N}\quad :$ $\frac{1}{2}<u_n\leq 1$

Activité2 :soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par : $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\sqrt{u_n+2} \end{cases}\quad \forall n\in\mathbb{N}$

1- Calculer les 3 premiers termes.

2- Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}\quad :0\leq u_n$

3- Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}$: $u_n\leq 2$

Solution :1)on a $u_{n+1}=\sqrt{u_n+2}$

Pour n=0 on a: $u_1=\sqrt{u_0+2}$ donc $u_1=\sqrt{2}$

Pour n=1 on a: $u_2=\sqrt{u_1+2}$ donc $u_2=\sqrt{\sqrt{2}+2}$

Pour n=2 on a: $u_3=\sqrt{u_2+2}$ donc $u_3=\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}+2}+2}$

2) Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}\quad :0\leq u_n$

1étapes : l'initialisation :Pour n=0 nous avons $u_0=0$ donc $0\leq u_0$.

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : d'hérédité ou Hypothèse de récurrence :

Supposons que: $0\leq u_n$

3étapes : Montrons alors que : $0\leq u_{n+1}$??

Or on a : $u_{n+1}=\sqrt{u_n+2}\geq 0$

donc : $\forall n\in\mathbb{N}\quad :0\leq u_n$

3) Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}\quad :u_n\leq 2$

1étapes : l'initialisation :Pour n=0 nous avons $u_0=0$ donc $u_0\leq 2$.

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : d'hérédité ou Hypothèse de récurrence :

Supposons que: $u_n\leq 2$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+1}\leq 2$??

on a : $u_n\leq 2$ donc $u_n+2\leq 4\Rightarrow\sqrt{u_n+2}\leq\sqrt{4}$

$\Rightarrow u_{n+1}\leq 2$

donc : $\forall n\in\mathbb{N}\quad :0\leq u_n$

Par suite : : $\forall n\in\mathbb{N}\quad :0\leq u_n\leq 2$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 0 car $u_n\leq 2\quad \forall n\in\mathbb{N}$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0car $0\leq u_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car : $\forall n\in\mathbb{N}\quad :$ $0\leq u_n\leq 2$

Définition : Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique. ($\mathbb{I}\subset\mathbb{N}$)

- On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est majorée s'il existe un réel M tel que : $\forall n\in I\quad u_n\leq M$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est minorée s'il existe un réel m tel que : $\forall n\in I\quad m\leq u_n$
- On dit que la suite ($(u_n)_{n\in I}$ est bornée si elle est majorée et minorée.

Exemple :soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $v_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

1)Montrer que $(v_n)_{n\geq 1}$ est minorée par 0

2)Montrer que $(v_n)_{n\geq 1}$ est majorée par $\frac{1}{2}$

3)Que peut-on déduire ?

Solution :1) Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad 0\leq v_n$??

$v_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ (Le conjugué)

$v_n=\frac{(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\geq 0$

Donc : $0\leq v_n\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

Donc : $(v_n)_{n\geq 1}$ est minorée par 0

Talamidi.com تم تحميل هذا الملف من موقع

2)Montrons que : $v_n \le \frac{1}{2}$?? $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$v_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} - \frac{1}{2} = \frac{2-\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

On a : $n \ge 1$ et $n+1 \ge 2$ donc $\sqrt{n} \ge 1$ et $\sqrt{n+1} \ge \sqrt{2}$

Donc : $\sqrt{n+1}+\sqrt{n} \ge 1+\sqrt{2}$ donc

$-\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right) \le -1-\sqrt{2}$

donc $2-\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right) \le 1-\sqrt{2}$ et puisque : $1-\sqrt{2} \prec 0$

Donc $v_n - \frac{1}{2} \prec 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Donc $v_n \prec \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Donc la suite $\left(v_n\right)_{n\ge 1}$ est majorée par $\frac{1}{2}$

3)Donc la suite $\left(v_n\right)_{n\ge 1}$ est bornée car :

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad : 0 < v_n < \frac{1}{2}$

Exercice1: Soit la suite récurrente $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$\begin{cases} u_{n+1} = {u_n}^2 + 2u_n + 2 \\ u_0 = -1 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Calculer u_1 et montrer que $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1

Solutions :

$u_{0+1} = {u_0}^2 + 2u_0 + 2 = (-1)^2 + 2\times(-1) + 2 = 1 + -2 + 2 = 1$

$u_n - 1 = {u_n}^2 + 2u_n + 2 - 1 = {u_n}^2 + 2u_n + 1 = \left(u_n+1\right)^2 \ge 0$

Donc : $1 \le u_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1

Exercice2: Soit la suite récurrente $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{7u_n}{2u_n+1} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Montrer que $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1 et majorée par 3.

Solutions : Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$: $0 < u_n < 3$

1étapes : n=0 on a : $0 < u_0 < 3$ car $0 < 1 < 3$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : d'hérédité ou Hypothèse de récurrence :

Supposons que: $0 < u_n < 3$

3étapes : Montrons alors que : $0 < u_{n+1} < 3$??

On a : $0 < u_n$ donc $0 < 2u_n + 1$ et $0 < 7u_n$

Donc $0 < u_{n+1}$ (1)

Et on a : $u_{n+1} - 3 = \frac{7u_n}{2u_n+1} - 3 = \frac{7u_n - 3\left(2u_n+1\right)}{2u_n+1}$

$u_{n+1} - 3 = \frac{u_n - 3}{2u_n+1}$ et puisque on a : $0 < u_n < 3$

on a donc : $u_n - 3 < 0$ et $0 < 2u_n + 1$

Donc $u_{n+1} - 3 < 0$ Donc $u_{n+1} < 3$ (2)

De (1) **et** (2) **en déduit que :** $0 < u_{n+1} < 3$

D'où $\forall n \in \mathbb{N} \quad : 0 < u_n < 3$

Exercice3 : Soit la suite récurrente $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$u_n = 3n^2 + 6n - 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Montrer que $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée

Solutions : Soit $n \in \mathbb{N}$ on a :

$u_n = 3n^2 + 6n - 4 = 3\left(n^2 + 2n\right) - 4 = 3\left(\left(n+1\right)^2 - 1\right) - 4$

$u_n = 3\left(n+1\right)^2 - 7$

on a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \left(n+1\right)^2 \ge 0$

donc : $3\left(n+1\right)^2 \ge 0$ donc $\left(n+1\right)^2 - 7 \ge -7$

donc : $u_n \ge -7$ par suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par -7

Exercice4 : Soit la suite récurrente $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie

par : $u_n = \frac{2+\cos n}{3-\sin\sqrt{n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Montrer que $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

Solutions : Soit $n \in \mathbb{N}$ on a :

$-1 \le \cos n \le 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et $-1 \le \sin\sqrt{n} \le 1$

donc : $1 \le 2 + \cos n \le 3$ et $-1 \le -\sin\sqrt{n} \le 1$

donc : $1 \le 2 + \cos n \le 3$ et $2 \le 3 - \sin\sqrt{n} \le 4$

donc : $1 \le 2 + \cos n \le 3$ et $\frac{1}{4} \le \frac{1}{3-\sin\sqrt{n}} \le \frac{1}{2}$

donc : $\frac{1}{4} \le \frac{2+\cos n}{3-\sin\sqrt{n}} \le \frac{3}{2}$

cad : $\frac{1}{4} \le u_n \le \frac{3}{2}$ donc : $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

Propriété : Une suite $\left(u_n\right)_{n\in I}$ est bornée si et seulement s'il existe un réel positif M tel que :

$\forall n \in I \ \left|u_n\right| \le M$

Exemple : Soit la suite récurrente $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$u_n = (-1)^n \sin\sqrt{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

Solutions : Soit $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$|u_n| = \left|(-1)^n \sin\sqrt{n}\right| = \left|(-1)^n\right|\left|\sin\sqrt{n}\right| = \left|\sin\sqrt{n}\right| \le 1$$

donc $|u_n| \le 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$

donc : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

4) Monotonie d'une suite.

Activité 1 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = \dfrac{-n}{n+2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Montrer que : $u_{n+1} - u_n \le 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Solutions : Soit $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{-(n+1)}{n+1+2}\right) - \left(\frac{-n}{n+2}\right) = \frac{-n-1}{n+3} + \frac{n}{n+2}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(-n-1)(n+2) + n(n+3)}{(n+3)(n+2)} = \frac{-2}{(n+3)(n+2)} < 0$$

Donc : $u_{n+1} - u_n \le 0$ donc $u_{n+1} \le u_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

On dira que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

Activité2 : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Montrer par récurrence que $u_n \le u_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Solutions : 1étapes : on a $u_1 = \sqrt{u_0 + 2} = \sqrt{2}$

Pour n=0 nous avons $u_0 = 1$ donc $u_0 \le u_1$.

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Supposons que: $u_n \le u_{n+1}$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+1} \le u_{n+2}$??

on a : $u_n \le u_{n+1}$ donc $u_n + 2 \le u_{n+1} + 2$

donc : $\sqrt{u_n + 2} \le \sqrt{u_{n+1} + 2}$ donc $u_{n+1} \le u_{n+2}$

Par suite : : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : u_n \le u_{n+1}$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

Définition : Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique. ($\mathbb{I} \subset \mathbb{N}$)

On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est croissante si : $\forall n \in I$ $\forall m \in I \ : m \le n \Rightarrow u_m \le u_n$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est décroissante si :

$\forall n \in I \ \ \forall m \in I \ : m \le n \Rightarrow u_m \ge u_n$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est monotone si elle est croissante ou décroissante sur $\mathbb{I}$.

Théorème : Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique. ($\mathbb{I} \subset \mathbb{N}$)

- La suite $(u_n)_{n\in I}$ est croissante si et seulement si: $\forall n \in I \ u_{n+1} \ge u_n$: **(P)**
- La suite $(u_n)_{n\in I}$ est décroissante si et seulement si: $\forall n \in I \ u_{n+1} \le u_n$

Démonstration :

On suppose que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est croissante donc

$\forall n \in I \ \ \forall m \in I \ : m \le n \Rightarrow u_m \le u_n$

d'où (et puisque n + 1 ≥ n) alors : $u_{n+1} \ge u_n$

Inversement : On suppose que la suite $(u_n)_{n\in I}$ vérifie la propriété **(P).**

Soit n et m deux entiers tels que n ≥ m on a :

$u_m \le u_{m+1} \le u_{m+2} \le \ldots \le u_n$ Donc la suite : $(u_n)_{n\in I}$ est croissante.

Exemple1: soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par : : $\begin{cases} u_0 = 1; u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n - 2 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Montrer que suite : $(u_n)_{n\in I}$ est croissante.

Solutions : montrons par récurrence que $u_{n+1} \le u_n$

1étapes : on a $u_1 \le u_0$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Supposons que: $u_{n+1} \le u_n$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+2} \le u_{n+1}$??

on a : $u_{n+2} - u_{n+1} = 2u_{n+1} - u_n - 2 - u_{n+1}$

donc $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n - 2$ et on a : $u_{n+1} - u_n \le 0$

donc : $u_{n+1} - u_n - 2 \le 0$ donc $u_{n+2} - u_{n+1} \le 0$

Par suite : : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : u_{n+1} \le u_n$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

Exemple2 : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Talamidi.com تم تحميل هذا الملف من موقع

Solutions :

$$u_{n+1}-u_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}+\frac{2^{n+1}}{n+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}$$

$u_{n+1}-u_n=\frac{2^{n+1}}{n+1}\succ 0$ Donc : $u_n\le u_{n+1}\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante

Exemple3 :soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$$

Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Solutions : $u_{n+1}-u_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+1+k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$

Et on a : $\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+1+k}=\sum_{k'=2}^{n+2}\frac{1}{n+k'}$ on pose $k'=k+1$

Et puisque k' est un variable on peut l'appeler k'

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+1+k}=\sum_{k'=2}^{n+2}\frac{1}{n+k'}=\sum_{k=2}^{n+2}\frac{1}{n+k}$$

Donc :

$$u_{n+1}-u_n=\sum_{k=2}^{n+2}\frac{1}{n+k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2(n+1)(2n+1)}\succ 0\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2^{n+1}}{n+1}\succ 0\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$$

donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante

Exercice5 :soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie

par : $\begin{cases} u_{n+1}=\dfrac{8(u_n-1)}{u_n+2} & \forall n\in\mathbb{N}\\ u_0=3 \end{cases}$

1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 2

2) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 4

3)Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Solutions :1) Montrons que $2\le u_n\quad \forall n\in\mathbb{N}$????

1étapes : n=0 on a : $2\le u_0$ car $2<3$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Hypothèse de récurrence :

Supposons que: $2\le u_n$

3étapes : Montrons alors que : $2\le u_{n+1}$??

$$u_{n+1}-2=\frac{8(u_n-1)}{u_n+2}-2=\frac{8(u_n-1)-2(u_n+2)}{u_n+2}=\frac{6u_n-12}{u_n+2}$$

$u_{n+1}-2=\frac{6(u_n-2)}{u_n+2}$ et puisque on a : $2\le u_n$

Donc : $u_n-2\ge 0$ et $u_n+2>0$

Donc : $u_{n+1}-2\ge 0$

donc $2\le u_n\quad \forall n\in\mathbb{N}$

2) Montrons que $u_n\le 4\quad \forall n\in\mathbb{N}$????

1étapes : n=0 on a : $u_0\le 4$ car $3<4$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Hypothèse de récurrence :

Supposons que: $u_n\le 4$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+1}\le 4$??

$$4-u_{n+1}=4-\frac{8(u_n-1)}{u_n+2}=\frac{4(u_n+2)-8(u_n-1)}{u_n+2}=\frac{-4u_n+16}{u_n+2}$$

$4-u_{n+1}=\frac{4(4-u_n)}{u_n+2}=\frac{4(4-u_n)}{u_n+2}$ et puisque on a :

$u_n\le 4$

Donc : $4-u_n\ge 0$ et $u_n+2>0$

Donc $u_{n+1}\le 4$ par suite $u_n\le 4\ \forall n\in\mathbb{N}$

3) $u_{n+1}-u_n=\frac{8(u_n-1)}{u_n+2}-u_n=\frac{8(u_n-1)-u_n(u_n+2)}{u_n+2}=\frac{-u_n^2+6u_n-8}{u_n+2}$

On va factoriser $-u_n^2+6u_n-8$: $\Delta=36-32=4>0$

$x_1=\frac{-6+2}{-2}=2$ et $x_2=\frac{-6-2}{-2}=4$ donc :

$-u_n^2+6u_n-8=-(u_n-2)(u_n-4)$

Donc : $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-2)(u_n-4)}{u_n+2}$

Or on a : $u_n\ge 2$ et $u_n\le 4$

Donc : $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-2)(u_n-4)}{u_n+2}\ge 0$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante

III) SUITES ARITHMETIQUES ; SUITES GEOMETRIQUES

1) Suite arithmétique.

1.1 Définition

Activité1 Compléter les suites de nombres suivantes :

-5 ; -2 ; 1 ; 4 ; … ;…. ;… ;16

10 ; 5 ; 0 ; -5 ; … ;…. ;… ;-25

Talamidi.com تم تحميل هذا الملف من موقع

Activité2 : soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$u_n = 3n+8 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Calculer $u_{n+1} - u_n$

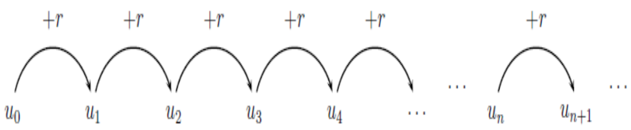
Solution : $u_{n+1} - u_n = (3(n+1)+8) - (3n+8)$

$u_{n+1} - u_n = 3n+3+8-3n-8 = 3 = cons\tan te$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est une suite arithmétique

Définition : On appelle suite **arithmétique** toute suite $(u_n)_{n\in I}$ définie par son premier terme et par la relation récurrente : $\forall n \in I \quad u_{n+1} = u_n + r$

Où r est un réel fixe. Le réel r s'appelle **la raison** de la suite $(u_n)_{n\in I}$.



Exemple : *soient Les suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par :* $u_{n+1} = u_n - 3$ et $u_0 = 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$v_n = n^2 + 2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

1)La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r = -3$ et de premier terme $u_0 = 2$

2) $v_0 = 2; v_1 = 3; v_2 = 6$

Ainsi : $v_1 - v_0 = 1$ et $v_2 - v_1 = 3$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est donc pas arithmétique

1.2 propriété caractéristique d'une suite arithmétique

Trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.

$(u_n)_{n\geq p}$ est suite arithmétique si et seulement si

$2u_{n+1} = u_n + u_{n+2} \ \forall n \geq p$

Preuve : soit $(u_n)_{n\geq p}$ suite arithmétique de raison r

On a donc : $u_{n+1} = u_n + r$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + r$

Donc : $u_{n+2} - u_{n+1} = r$ et $u_{n+1} - u_n = r$ donc :

$u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$ donc : $u_{n+2} + u_n = 2u_{n+1}$

Inversement : soit $(u_n)_{n\geq p}$ suite tel que :

$2u_{n+1} = u_n + u_{n+2} \quad \forall n \geq p$

Montrons que $(u_n)_{n\geq p}$ est une suite arithmétique ??

On a : $2u_{n+1} = u_n + u_{n+2}$ donc $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n \quad \forall n \geq p$

Donc la suite : $(u_{n+1} - u_n)_{n\geq p}$ est une suite constante

Soit r cette constante donc : $u_{n+1} - u_n = r$

Donc $(u_n)_{n\geq p}$ est une suite arithmétique

Application : Déterminer le réel x pour que les nombres $(3x - 1)$;$(1 - 4x)$ et $(x - 5)$ soient les termes consécutifs d'une suite Arithmétique pour laquelle il faut déterminer la raison.

Solution : $(3x - 1)$;$(1 - 4x)$ et $(x - 5)$ soient les Termes consécutifs d'une suite Arithmétique

Ssi $2(1-4x) = (3x-1) + (x-5)$

$-8x + 2 = 4x - 6 \Leftrightarrow -12x = -8 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

Donc les termes de la suite sont :

$3\times\frac{2}{3} - 1 = 1$ et $1 - 4\times\frac{2}{3} = -\frac{5}{3}$ et $\frac{2}{3} - 5 = -\frac{13}{3}$

Donc : $-\frac{5}{3} - 1 = -\frac{8}{3} = r$

1.3. Terme général d'une suite arithmétique.

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite arithmétique de raison r et u_p l'un de ses termes. Soit n un entier naturel

$$\cancel{u_{p+1}} = u_p + r$$
$$\cancel{u_{p+2}} = \cancel{u_{p+1}} + r$$
$$\vdots$$
$$u_n = \cancel{u_{n-1}} + r$$
$$u_n = u_p + \underbrace{(r + r + \cdots + r)}_{(n-p)termes}$$

En faisant la somme membre à membre on obtient :

D'où : $u_n = u_p + (n-p)r$

Propriété : Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite arithmétique de raison r et u_p l'un de ses termes

on a : $\forall n \in I \quad u_n = u_p + (n-p)r$

Remarque : Si u_0 est le premier terme d'une suite arithmétique de raison r alors : $u_n = u_0 + nr$

Si u_1 est le premier terme d'une suite arithmétique de raison r alors : $u_n = u_1 + (n-1)r$

Application : Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que $u_1 = 3$ et $u_5 = 9$

1) Déterminer sa raison r

Talamidi.com تم تحميل هذا الملف من موقع

2) Déterminer son premier terme u_0 .

3) écrire u_n en fonction de n

Solutions : 1) la raison r ??

on a : $\forall(n;p)\in\mathbb{N}^2 \quad u_n = u_p + (n-p)r$

Pour n= 5 et p=1 on a : $u_5 = u_1 + (5-1)r$

Donc : $9 = 3 + 4r \Leftrightarrow 4r = 6 \Leftrightarrow r = \frac{3}{2}$

2) le terme u_0 ??

$u_1 = u_0 + (1-0)r \Leftrightarrow 3 = u_0 + \frac{3}{2} \Leftrightarrow u_0 = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

3) u_n en fonction de n ?

$u_n = u_1 + \frac{3}{2}(n-1) \Leftrightarrow u_n = 3 + \frac{3}{2}(n-1)$

$u_n = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Exercice6 :soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie

par : $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n} & \forall n\in\mathbb{N} \\ u_0 = 2 \end{cases}$ et on considère la suite

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$v_n = \frac{1}{u_n - 1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique

2) écrire u_n en fonction de n

Solution :

1) $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}-1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{\frac{2u_n-1}{u_n} - 1} - \frac{1}{u_n - 1}$

$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n}{u_n - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = 1$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison

$r = 1$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{u_0 - 1} = \frac{1}{2-1} = 1$

2) écrire u_n en fonction de n

On a $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison

$r = 1$ et de premier terme $v_0 = 1$

Donc : $v_n = v_0 + nr = 1 + n\times 1 = 1 + n$

Puisque : $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ donc $u_n - 1 = \frac{1}{v_n}$ donc $u_n = \frac{1}{v_n} + 1$

donc $u_n = \frac{v_n + 1}{v_n} = \frac{1+(n+1)}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$

1.4 La somme des termes successifs d'une suite arithmétique.

propriété : Soient $(u_n)_n$ une suite arithmétique

p un entier naturel et $S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_n$

On a : $s_n = \frac{(n-p+1)}{2}(u_p + u_n)$

Avec : $n - p + 1$ le nombre des termes de la somme

u_p : le premier terme de la somme

u_n : le dernier terme de la somme

Preuve : Soient $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison r et p un entier naturel et

$s_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$

Donc : $s_n = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \ldots + u_{p+2} + u_{p+1} + u_p$

En faisant la somme membre à membre on obtient :

$2s_n = (u_n + u_p) + (u_{n-1} + u_{p+1})\ldots + (u_{n-1} + u_{p+1}) + (u_n + u_p)$

Et on a : $u_{n+k} + u_{p+k} = (u_p + kr) + u_p + (n-k-p)r$

Donc : $u_{n+k} + u_{p+k} = u_p + u_p + (n-p)r$

Donc : $u_{n+k} + u_{p+k} = u_p + u_n$

Et par suite :

$2s_n = (u_n + u_p) + (u_n + u_p)\ldots + (u_n + u_p) + (u_n + u_p)$

Donc :

$2s_n = \underbrace{(u_n + u_p) + (u_n + u_p)\ldots + (u_n + u_p) + (u_n + u_p)}_{n-p+1}$

Donc : $2s_n = (n-p+1)(u_n + u_p)$

Donc : $s_n = \frac{(n-p+1)}{2}(u_p + u_n)$

Remarque : On note la somme :

$s_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$ par :

$s_n = \sum_{k=p}^{k=n} u_k$

Si p=0 on a : $s_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$

Si p=1 on a : $s_n = \sum_{k=1}^{k=n} u_k = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$

Exemple : calculer en fonction de n les sommes suivantes :

Talamidi.com تم تحميل هذا الملف من موقع

1) $s_n = \sum_{k=1}^{k=n} k = 1+2+3+...+n$

2) $s_n' = \sum_{k=0}^{k=n} (2k+1) = 1+3+5+...+(2n+1)$

Solutions :1)on pose : $u_n = n$

On a : $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison r=1

Car : $u_{n+1} - u_n = 1$

Donc : $s_n = \sum_{k=1}^{k=n} k = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$

Donc : $s_n = \frac{n}{2}(1+n)$

1)on pose : $v_n = 2n+1$

On a : $(v_n)_n$ une suite arithmétique de raison r=2

Car : $v_{n+1} - v_n = 2$

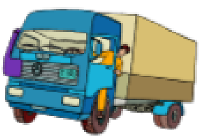
Donc :

$s_n' = \sum_{k=0}^{k=n} (2k+1) = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n = \frac{n+1}{2}(v_0 + v_n)$

Donc :

$s_n' = \frac{n+1}{2}(1+2n+1) = \frac{n+1}{2}(2n+2) = (n+1)^2$

Exercice7 : Une entreprise de transport possède 40 camions en décembre 1991.



L'évolution de l'entreprise est telle que celle-ci doit acheter 8 camions supplémentaires chaque année.

1) Calculer le nombre de camions que possède l'entreprise en 1992, en 1993 et en 1994.

2) Ces nombres forment une suite.

a) Donner la nature de cette suite.

b) Préciser le premier terme u_1 et la raison de cette suite.

c) Donner l'expression du nombre Un de camions que possède l'entreprise l'année n.

3) Quel est le nombre de camions que possède l'entreprise en 2002 ?

2) Suite géométrique.

Activité1 Compléter les suites de nombres suivantes :

1 ; 2 ; 4 ; 8 ; … ;…. ;… ;128

1 ; 3 ; 9 ; 27 ; … ; …

$1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{8}$,; … ;…. ;…

Définition : On appelle suite géométrique toute suite $(u_n)_n$ définie par son premier terme et par la relation récurrente : $u_{n+1} = qu_n \quad \forall n \in I$ où q est un réel fixe.

Le réel q s'appelle **la raison** de la suite $(u_n)_n$.

Le premier terme et la raison d'une suite géométrique s'appellent aussi les éléments de la suite géométrique.

Exemple1 : soit la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 2$

la suite $(u_n)_n$ est une suite géométrique de raison

$q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = 2$

Exemple2 : soit la suite $(v_n)_n$ définie par :

$v_n = 2 \times 3^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2 \times 3^{n+1}}{2 \times 3^n} = 3 = q$

donc la suite est géométrique de raison $q = 3$

1.2 Terme général d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison q et p un entier naturel on a :

$u_{p+1} = qu_p$

$u_{p+2} = qu_{p+1}$

$\vdots$

$u_n = qu_{n-1}$

En faisant les produits membre à membre on obtient :

$u_n = \underbrace{q \times q \times q \times .. \times q}_{n-p} u_p$

d'où $u_n = q^{n-p} u_p$

Propriété : Si $(u_n)_{n \in I}$ est une suite géométrique de raison q et si p est un entier naturel alors :

$u_n = q^{n-p} u_p \quad \forall n \in I$

Cas particuliers :

1) si p=0 alors: $u_n = q^n u_0$ 2) si p=1 alors : $u_n = q^{n-1} u_1$

Exemple1 : Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique tel que

$u_1 = \frac{3}{2}$ et $u_4 = \frac{3}{16}$ 1) Déterminer sa raison q

2) écrire u_n en fonction de n

Solutions : 1) la raison q ??

on a : $\forall (n; p) \in \mathbb{N}^2 \quad u_n = q^{n-p} u_p$

Talamidi.com تم تحميل هذا الملف من موقع

Pour n= 4 et p=1 on a : $u_4 = q^{4-1}u_1$

Donc : $\frac{3}{16} = q^3 \frac{3}{126} \Leftrightarrow q^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow q = \frac{1}{2}$

2) u_n en fonction de n ?

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times u_1 \Leftrightarrow u_n = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Exemple2 :soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3-u_n} \\ u_0 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$ et on considère la suite

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = 1 - \frac{2}{u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique

2) écrire u_n en fonction de n

Solution :1) $v_{n+1} = 1 - \frac{2}{u_{n+1}} = 1 - \frac{2}{\frac{u_n}{3-u_n}} = 1 - \frac{6-2u_n}{u_n}$

$v_{n+1} = 3\left(1 - \frac{2}{u_n}\right)$ donc $v_{n+1} = 3v_n$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $v_0 = -3$

2) écrire u_n en fonction de n

On a $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $v_0 = -3$

Donc : $v_n = u_0 \times q^n \Leftrightarrow v_n = -3 \times 3^n = -3^{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$

Puisque : $v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$ donc $u_n = \frac{2}{1-v_n}$ donc $u_n = \frac{2}{1+3^{n+1}}$

1.3 La somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.

Proposition : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q , et u_p l'un de ses termes.

Et $s_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + ... + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$

Si $q = 1$ alors : $s_n = (n-p+1)u_p$

Si $q \neq 1$ alors : $s_n = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

Preuve : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q , et u_p l'un de ses termes.

soit $s_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + ... + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$

Si $q = 1$ tous les u_i sont égaux

et $s_n = u_p + u_p + u_p + ... + u_p \ (n-p+1) termes$

donc : $s_n = (n-p+1)u_p$

Si $q \neq 1$

On a : $s_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + ... + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$

Donc : $qs_n = qu_p + qu_{p+1} + qu_{p+2} + ... + qu_{n-2} + qu_{n-1} + qu_n$

Donc :

$qs_n = qu_{p+1} + qu_{p+2} + qu_{p+3} + ... + qu_{n-1} + qu_n + qu_{n+1}$

$s_n - qs_n = u_p - u_{n+1}$

Par suite : $s_n(1-q) = u_p - u_p q^{n-p+1}$

$$s_n = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

Application :

Exemple1 : Un jeune homme se préparait à l'examen du baccalauréat ; son père, pour l'encourager, lui demanda ce qu'il désirait en récompense

Mon examen devant avoir lieu le 20 juin, répond-t-il, donne-moi seulement 1 centime le 1er juin, 2 centimes le lendemain, 4 centimes le surlendemain, en doublant chaque jour jusqu'au 20 inclusivement. Et donne mois la somme. J'emploierai cet argent pour faire un voyage pendant les vacances.

Le père pensa qu'avec cette somme son fils n'irait pas loin ; mais au bout de quelques jours, il commença à s'apercevoir de son erreur.

Avec quelle somme le fils va-t-il pouvoir partir en vacances ?

Solution : Les nombres de centimes à payer chaque jour sont les termes d'une suite géométrique de 20 termes dont le premier est : $u_1 = 1$ et et la raison $q = 2$

$u_2 = 2$ (La somme à donner le 2 iem jour) ....

$u_{20} = ...$ (La somme à donner le 20e jour)

Donc : $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$

$u_{20} = 2^{20-1} = 2^{19} = 524288$ Centimes

La somme totale à payer serait :

$$s_{20}=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_{20}=u_1\frac{1-2^{20-1+1}}{1-2}$$

$$s_{20}=2^{20}-1=10485.75$$

centimes $s_{20}\simeq 1million$ 500dh Joli voyage !

Exemple2 : calculer en fonction de n la somme suivante :

$$s_n=\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Solutions :1)on pose : $u_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

On a : $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison $q=\frac{1}{2}$

Car : $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{2}$ Donc : $s_n=\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k=1\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

Propriété : a , b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique

si et seulement si $b^2=a\times c$

Preuve : (En exercice)

Application :

Déterminer le réel x pour que les nombres : $(1 + x^2)$; $(3 + x)$ et 10 soient les termes consécutifs d'une suite géométrique dans cet ordre et déterminer sa raison.

Solution : $(1 + x^2)$; $(3 + x)$ et 10 sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique

si et seulement si $(3+x)^2=10\times(1+x^2)$

$$\Leftrightarrow x^2+6x+9=10x^2+10\Leftrightarrow 9x^2-6x+1=0$$

$$\Leftrightarrow(3x-1)^2=0\Leftrightarrow 3x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$$

Donc les termes sont : $\frac{10}{9}$ et $\frac{10}{3}$ et 10 donc : $q=\frac{10/3}{10/9}=3$

Exercice8 : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+2}=\frac{1}{27}(12u_{n+1}-u_n) \\ u_0=2;u_1=\frac{4}{9}\end{cases}\quad\forall n\in\mathbb{N}$$

et on considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$v_n=u_n-\frac{1}{3^n}\quad\forall n\in\mathbb{N}$

1) Montrer que $u_{n+1}=\frac{1}{9}u_n+\frac{2}{3^{n+2}}\quad\forall n\in\mathbb{N}$

2) a)Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont en déterminera la raison et le premier terme

b) écrire v_n et u_n en fonction de n

c) calculer la somme : $s_n=\sum_{k=0}^{k=n}u_k=u_0+u_1+\ldots+u_n$

Solution :1)montrons par récurrence que

$u_{n+1}=\frac{1}{9}u_n+\frac{2}{3^{n+2}}\quad\forall n\in\mathbb{N}$

1étapes : n=0 $u_1=\frac{1}{9}u_0+\frac{2}{3^{0+2}}=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes :Supposons que: $u_{n+1}=\frac{1}{9}u_n+\frac{2}{3^{n+2}}$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+2}=\frac{1}{9}u_{n+1}+\frac{2}{3^{n+3}}$??

on a: $u_{n+1}=\frac{1}{9}u_n+\frac{2}{3^{n+2}}$ donc $u_n=9\left(u_{n+1}-\frac{2}{3^{n+2}}\right)$

et on a : $u_{n+2}=\frac{1}{27}(12u_{n+1}-u_n)$

$$u_{n+2}=\frac{1}{27}\left(12u_{n+1}-9\left(u_{n+1}-\frac{2}{3^{n+2}}\right)\right)$$

$u_{n+2}=\frac{1}{27}\left(3u_{n+1}+\frac{2}{3^n}\right)$ donc $u_{n+2}=\frac{1}{9}u_{n+1}+\frac{2}{3^{n+2}}$

Par suite : : $\forall n\in\mathbb{N}\quad :u_{n+1}=\frac{1}{9}u_n+\frac{2}{3^{n+2}}$

2)a) on a: $v_{n+1}=u_{n+1}-\frac{1}{3^{n+1}}$

Donc : $v_{n+1}=\frac{1}{9}u_n+\frac{2}{3^{n+2}}-\frac{1}{3^{n+1}}=\frac{1}{9}u_n-\frac{1}{3^{n+2}}$

$v_{n+1}=\frac{1}{9}\left(u_n-\frac{1}{3^n}\right)$ donc $v_{n+1}=\frac{1}{9}v_n$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison

$q=\frac{1}{9}$ et de premier terme $v_0=1$

2) b)écrire v_n et u_n en fonction de n

On a $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison

$q=\frac{1}{9}$ et de premier terme $v_0=1$

Donc : $v_n=v_0\times q^n\Leftrightarrow v_n=\left(\frac{1}{9}\right)^n\quad\forall n\in\mathbb{N}$

Puisque : $u_n=v_n+\frac{1}{3^n}$ donc $u_n=\left(\frac{1}{9}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n$

Talamidi.com تم تحميل هذا الملف من موقع

2) c) $s_n=\sum_{k=0}^{k=n}u_k=u_0+u_1+...+u_n$??

$u_n=v_n+w_n$ avec $w_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$

on a $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites géométriques de raison $q=\frac{1}{9}$ et $q'=\frac{1}{3}$ donc

donc $s_n=\sum_{k=0}^{k=n}u_k=\sum_{k=0}^{k=n}v_k+\sum_{k=0}^{k=n}w_k$

$$s_n=\sum_{k=0}^{k=n}u_k=v_0\frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{9}}+w_0\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{9}{8}\left(1-\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}\right)+\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{k=n}u_k=\frac{21}{8}-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{9}\right)^n-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Exercice9 :soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases}u_{n+1}=\dfrac{u_n}{\sqrt{u_n+2}} & \forall n\in\mathbb{N}\\ u_0\in]-1;0[\end{cases}$$

1) Montrer que $-1\prec u_n\prec 0\quad\forall n\in\mathbb{N}$

2) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante

3) Montrer que $u_{n+1}\geq\frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}}\quad\forall n\in\mathbb{N}$

Et en déduire que : $u_n\geq\frac{u_0}{\left(\sqrt{u_0+2}\right)^n}\quad\forall n\in\mathbb{N}$

Solution : 1) montrons par récurrence que $-1\prec u_n\prec 0\quad\forall n\in\mathbb{N}$

1étapes : n=0 on a : $-1\prec u_0\prec 0$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes :Supposons que: $-1\prec u_n\prec 0$

3étapes : Montrons alors que : $-1\prec u_{n+1}\prec 0$??

On a : $-1\prec u_n\prec 0$ donc : $1\prec u_n+2\prec 2$

donc : $1\prec\sqrt{u_n+2}\prec\sqrt{2}$ donc : $\frac{1}{\sqrt{2}}\prec\frac{1}{\sqrt{u_n+2}}\prec 1$

et puisque : $0\prec -u_n\prec 1$ alors : $0\prec\frac{-u_n}{\sqrt{u_n+2}}\prec 1$

donc : $-1\prec\frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}}\prec 0$ donc $-1\prec u_{n+1}\prec 0$

d'où : $-1\prec u_n\prec 0\quad\forall n\in\mathbb{N}$

2) Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}}-u_n=\frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}}\left(1-\sqrt{u_n+2}\right)$$

et puisque : $1-\sqrt{u_n+2}\prec 0$ et $\frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}}\prec 0$

alors : $u_{n+1}-u_n\succ 0$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante

3) Montrons que $u_{n+1}\geq\frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}}\quad\forall n\in\mathbb{N}$

Soit $n\in\mathbb{N}$ on a : $u_n\geq u_0$ car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante

Donc : $\sqrt{2+u_n}\geq\sqrt{2+u_0}$ cad $\frac{1}{\sqrt{2+u_n}}\leq\frac{1}{\sqrt{2+u_0}}$

et puisque : $u_n\prec 0$ alors : $\frac{u_n}{\sqrt{2+u_n}}\geq\frac{u_n}{\sqrt{2+u_0}}$

Donc : $u_{n+1}\geq\frac{u_n}{\sqrt{2+u_0}}\quad\forall n\in\mathbb{N}$

3)Soit $n\in\mathbb{N}$ on a : $0\succ u_{n+1}\geq\frac{u_n}{\sqrt{2+u_0}}$

Donc : $0\leq -u_{n+1}\leq\frac{-u_n}{\sqrt{2+u_0}}$

En donnant à n des valeurs on trouve :

$0\leq -u_1\leq\frac{-u_0}{\sqrt{2+u_0}}$

$0\leq -u_2\leq\frac{-u_1}{\sqrt{2+u_1}}$

………

$0\leq -u_{n-1}\leq\frac{-u_{n-2}}{\sqrt{2+u_0}}$

$0\leq -u_n\leq\frac{-u_{n-1}}{\sqrt{2+u_0}}$

Le produit des inégalités donne : $0\prec -u_n\leq\frac{-u_0}{\left(\sqrt{u_0+2}\right)^n}$

Donc : $u_n\geq\frac{u_0}{\left(\sqrt{u_0+2}\right)^n}\quad\forall n\in\mathbb{N}$

Talamidi.com تم تحميل هذا الملف من موقع

Activités sur les suites

Activité 1 :

Jeu d'échec et suite géométrique.

Le jeu d'échec fut inventé par un mathématicien indien. le Roi le communiqua en fut si émerveillé qu'il dit à l'inventeur de choisir lui-même la récompense qu'il désirait.

Or l'échiquier se compose de 64 case.

Le mathématicien demanda 1 grain de blé pour la première case, 2 grains pour la deuxième, 4 grains pour la troisième et ainsi de suite en doublant toujours le nombre de grains d'une case à la suivante jusqu'à la dernière.

Tout le monde fut étonné de la modicité d'une pareille demande ; mais on fut bien plus surpris quand le mathématicien, ayant fait son calcul, prouva au roi que son royaume ne suffirait pas à produire en plusieurs années tout le blé qu'il demanderait.

En effet, si on se sert de la formule pour avoir le nombre de grains, on obtient

$S = 2^{64} - 1 = 18\ 446\ 774\ 073\ 709\ 551\ 615$.

On peut savoir à peu prés combien il a de grains dans un kilo de blé et combien un hectare de terrain produit en moyenne de kilogrammes et donc combien d'hectares il faudrait pour produit le nombre demandé. On trouve que la surface entière de la terre ensemencée ne serait pas suffisante.

On a aussi calculé que cette quantité de grains couvrirait à la hauteur de 1 m la surface de la france considérée comme plane.

Activité 2 :

1) La population d'un village de montagne diminue tous les ans de 20 %. Sachant qu'en 1996 elle était de 1 875 habitants, compléter le tableau suivant :

Année	1996	1997	1998	1999	2000
Nombre d'habitants					

2) Montrer que les nombres d'habitants sont des termes d'une suite dont on déterminera la nature et la raison.

3) À l'aide de la calculatrice ou d'un tableur :

a) Déterminer la population de ce village en 2010

b) Donner l'année d'extinction de ce village si on suppose la diminution de la population constante

La célèbre suite du mathématicien italien Fibonacci

La **suite de Fibonacci** tient son nom du mathématicien italien Leonardo Fibonacci, qui a vécu à Pise au XIIème siècle (1175-1240), d'où son nom de Léonard de Pise, en référence à Léonard de Vinci.

La suite de Fibonacci se construit facilement : chaque terme de la suite, à partir du rang 2, s'obtient en additionnant les deux précédents, les deux premiers termes étant 0 et 1. Le troisième terme est donc 1 (0 + 1 = 1), le quatrième terme 2 (1 + 1 = 2), le cinquième 3 (1 + 2 = 3), le sixième 5 (2 + 3 = 5), et ainsi de suite. Le début de la suite du célèbre mathématicien Fibonacci est donc : 0, 1, 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13, 21 ...

Appelons (u_n) la suite de Fibonacci. On a donc $u_0 = 0$; $u_1 = 1$ et pour tout n entier naturel,

on a alors $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Chaque terme de cette suite, à partir du rang 2, est donc la somme des deux termes précédents.

La suite de Fibonacci n'est ni arithmétique, ni géométrique.

En effet, $u_1 - u_0 = 1 - 0 = 1$ et $u_2 - u_1 = 1 - 1 = 0$. La différence entre deux termes consécutifs de cette suite n'est pas constante donc la suite de Fibonacci n'est pas arithmétique.

Son premier terme étant 0, elle ne peut être géométrique. On remarque également par exemple que $u_4/u_3 = 3/2$ et que $u_5/u_4 = 5/3$. En définissant une suite en prenant les termes de la suite de Fibonacci à partir du terme de rang 2, on obtient donc une suite qui n'est pas géométrique : le rapport entre 2 termes consécutifs de cette suite n'est pas constant.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien